TD 1: Diffusion de particules et diffusion thermique en régime stationnaire

Exercice 1: Diffusion de neutrons dans un réacteur nucléaire à symétrie sphérique

On considère, dans un réacteur nucléaire fonctionnant en *régime stationnaire*, une source de neutrons sphérique, de centre O et de rayon R, émettant σ particules par unité de volume et unité de temps. Ces neutrons diffusent à l'extérieur de la source. On note $n(\vec{r}, t)$ la densité de neutrons en un point de vecteur position $\vec{r}$ à l'instant t, $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$ le vecteur densité de flux de particules et D le coefficient de diffusion.

1. **a.** En considérant un volume élémentaire approprié, établir la relation liant σ, $\partial n/\partial t$ et $\mathrm{div}\vec{\jmath}$. On rappelle que, compte tenu de la symétrie sphérique, $\mathrm{div}\vec{\jmath} = (1/r^2)d(r^2 j)/dr$.

b. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par n?

c. Ecrire, en fonction de $\partial n/\partial r$, le flux de particules $\Phi(\vec{r}, t)$ traversant par unité de temps une sphère de rayon r centrée en O.

2. Diffusion de neutrons dans un milieu non absorbant: on suppose que le milieu à l'extérieur de la source n'absorbe pas les neutrons.

a. En utilisant l'équation établie au 1.a., donner l'expression de $\Phi(r)$ en fonction des données du problème. On distinguera les cas $r > R$ et $r \leq R$.

b. Déterminer et représenter $n(r)$.

3. Absorption des neutrons par réaction nucléaire: le milieu extérieur à la source, riche en noyaux de bore, absorbe les neutrons à raison de C captures par unité de volume et de temps.

a. Faire le bilan du flux de particules dans un volume élémentaire, et en déduire l'expression de $\Phi(r)$.

b. Montrer qu'il existe une valeur R_0 de r en laquelle le flux s'annule. Que peut–on dire de Φ en $r > R_0$?

Exercice 2: Diffusion de la vapeur d'eau au–dessus d'un lac

La densité volumique $n(z)$ de molécules d'eau en phase vapeur ne dépend que de l'altitude z au–dessus de la surface du lac. La pression partielle de vapeur d'eau à la surface du lac est $p(0) = 3.3$ kPa. Elle vaut $p(L) = 0.75p(0)$ à l'altitude $L = 10$ m. La température T est uniforme et égale à 300 K. La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait avec un coefficient de diffusion dans l'air $D = 2.2 \times 10^{-5}$ m^2 s^{-1}.

1. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $n(z)$, en *régime stationnaire*, entre 0 et L. En déduire l'expression de $n(z)$.

2. Calculer la masse d'eau évaporée en 1 heure. On donne la surface du lac $S = 1$ ha $= 10^4$ m^2.

3. Quelle est la résistance R à la diffusion?

Exercice 3: Conducteurs thermiques en contact

Dans le cadre de la réfection d'une maison, on envisage de recouvrir les façades extérieures d'un enduit et de doubler intérieurement les murs en pierre par du placo–plâtre séparé du mur par du polystyrène. On donne ci–dessous les épaisseurs e et les conductivités thermiques λ des divers matériaux utilisés:

Matériaux	Pierre	Enduit extérieur	Polystyrène	Plâtre
e en cm	50	1	5	1
λ en W m^{-1} K^{-1}	1.2	1.1	0.041	0.35

1. Calculer la résistance thermique par m^2 du mur isolé, et la comparer à celle du mur non isolé.

2. Calculer l'économie thermique ainsi réalisée pendant les 120 jours de froid, par m^2 de surface. On prendra $T_{\text{interieur}} = 20°$ C et $T_{\text{exterieur}} = 0°$ C.

Exercice 4: Conduction thermique dans un combustible nucléaire

Dans un barreau cylindrique d'uranium, utilisé comme combustible nucléaire, la puissance volumique créée par les réactions nucléaires qui s'y produisent est $\sigma = 480$ MW m^{-3}. La conductivité thermique de l'uranium est $\lambda = 30$ W m^{-1} K^{-1} et sa température de fusion $T_{\text{f}} = 1405$ K. La surface latérale du barreau est maintenue à la température $T_s = 443$ K.

On considère deux cas:
Barreau plein: le barreau est un cylindre homogène de rayon $R = 2$ cm.
Barreau creux: le barreau a la forme d'un tube creux de rayon extérieur $R = 2$ cm et de rayon intérieur $R_i = 1$ cm. La surface intérieure du tube est recouverte d'un isolant thermique parfait.

1. Dans chacun des cas, établir, en *régime stationnaire*, la loi de variation de la température $T(r)$, où r est la distance d'un point du matériau à l'axe du cylindre.

2. Quelle est la température maximale? Commenter.

3. Calculer la puissance dissipée par le barreau sur une longueur de 1 m.